

WISKUNDE VIR HOUTWERKERS

Afdeling 1: Nuttige konstruksies

1.1 Middelpunt van gegewe lynstuk

1.2 Loodlyn op 'n gegewe lyn, deur 'n gegewe punt wat

- (a) buite die gegewe lyn is
- (b) op die gegewe lyn is.

1.3 Driehoek met drie gegewe sylengtes.

1.4 Die “goue snit” / “goue verhouding”.

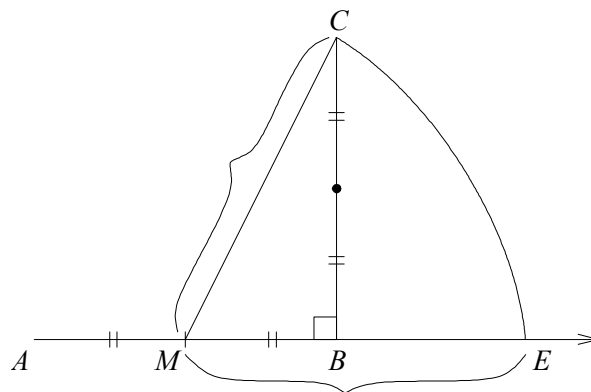
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$$

'n Lengte AB is gegee. U wil 'n lengte XY vind só dat

$$\frac{AB}{XY} = \phi \quad \text{óf} \quad \frac{XY}{AB} = \phi.$$

- Laat $BC = AB$ en $\hat{B} = 90^\circ$.
- Laat M die middelpunt van AB wees.
- Met M as middelpunt, merk $ME = MC$ of (E op AB verleng).
- Nou is

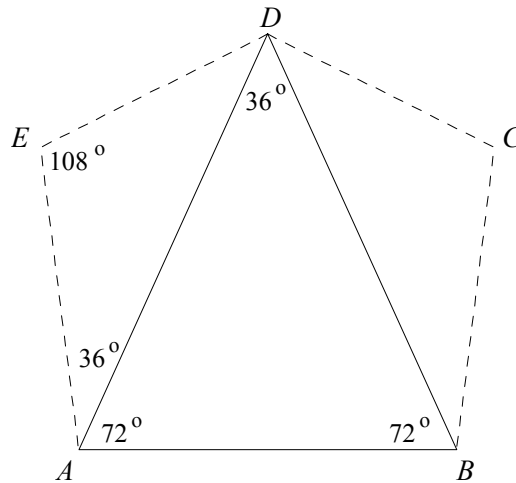
$$\frac{AB}{BE} = \frac{AE}{AB} = \phi.$$



1.5 “Goue” reghoek.

Dit is 'n reghoek met $\frac{\text{Lengte}}{\text{Breedte}} = \phi$.

1.6 Reëlmatige vyfhoek, met gegewe sylengte. Konstrueer 'n “goue driehoek”: Met gegewe sylengte as **kort sy**, 'n driehoek waar die ander twee sye elke die **lang sy** in “goue” verhouding is.



AB is gegee.

$AD = BD$ sodat

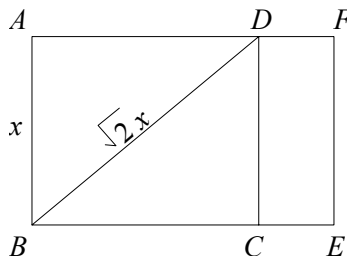
$$\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{AB} = \phi.$$

Voltooi konstruksie deur driehoeke DCB en DEA te konstrueer, met $DC = CB = DE = EA = \underline{AB}$.

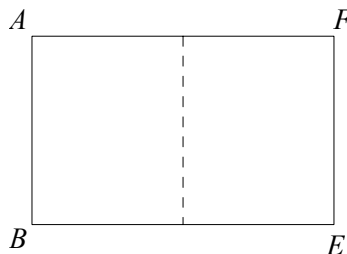
(Interessant: $\phi^2 = \phi + 1$

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1)$$

1.7 Reghoek wat gelykvormig is aan sy helftes: Konstrueer 'n reghoek met lang sy = hoeklyn van kort sy se vierkant:



$ABCD$ is 'n vierkant, $BE = BD$



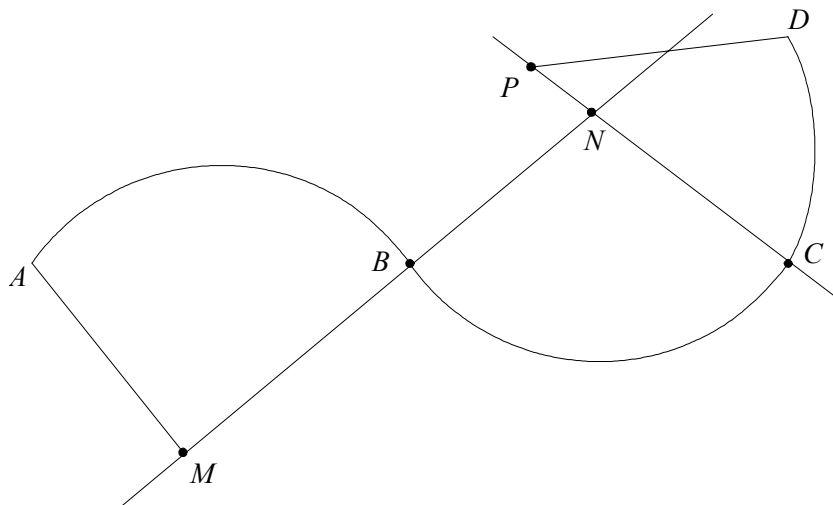
Nou is die twee helftes van reghoek $ABEF$ gelykvormig aan reghoek $ABEF$.

$$\frac{\text{Lang sy}}{\text{Kort sy}} = \sqrt{2} = 1,41421\dots$$

Toepassing: Standaard papiergroottes.

Type	Lang sy in m	Kort sy in m	Oppervlakte in m ²
AO	$\sqrt{\sqrt{2}} = 1,1892$	$\sqrt{\sqrt{0,5}} = 0,8409$	1,0000
A1	0,8409	0,5946	$\frac{1}{2} = 0,5000$
A2	0,5946	0,4204	$\frac{1}{4} = 0,2500$
A3	0,4204	0,2973	$\frac{1}{8} = 0,1250$
A4	0,2973	0,2102	$\frac{1}{16} = 0,0625$
A5	0,2102	0,1487	$\frac{1}{32} = 0,03125$
A6	0,1487	0,1051	$\frac{1}{64} = 0,015625$

1.8 Kurwes wat uit aaneengeskakelde sirkelbogies bestaan:



Sirkelboë skakel sonder knakpunte by mekaar aan as die volgende reël nagekom word:

Die twee sirkel-middelpunte en die konneksie-punt moet op dieselfde reguit lyn wees.

In die skets is boog AB se radius $= MA = MB$ en boog BC se radius is $NB = NC$. Dus moet M, N, B kollineêr wees.

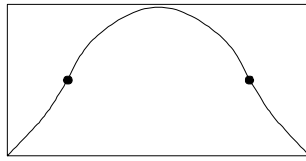
Boog BC se radius is $NB = NC$.

Boog CD se radius is $PC = PD$.

Dus moet N, P, C kollineêr (saamlynig) wees.

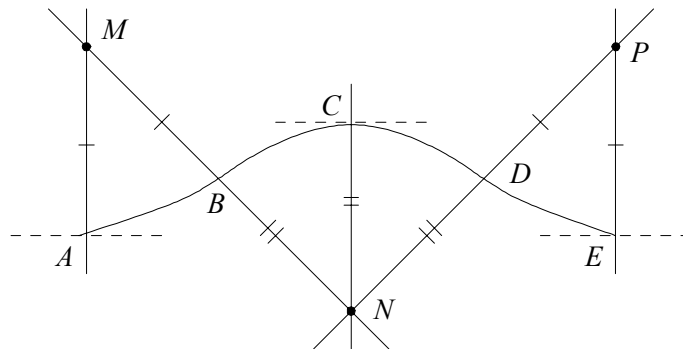
Toepassings:

- Geweltjie



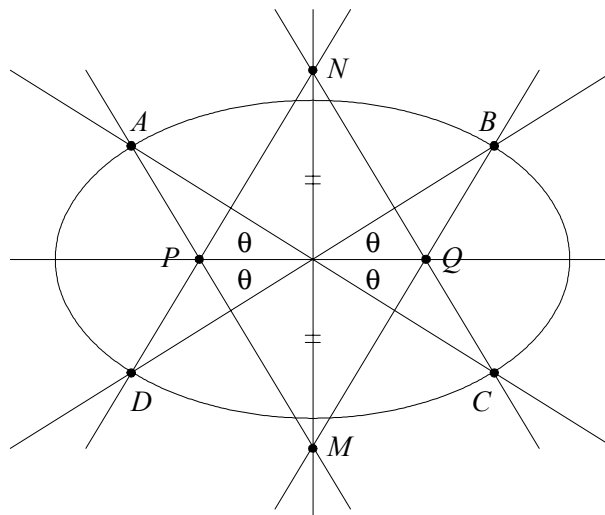
- Vals ellips

1.8.1 Geweltjie:



Aangesien die raaklyne by A , C en E horisontaal moet wees, moet die middelpunte M , N en P op vertikale lyne deur A , C en E geleë wees.

1.8.2 Vals ellips:



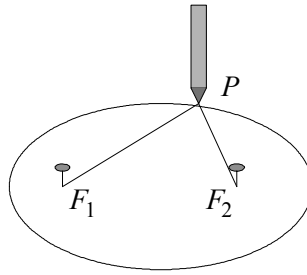
Aanbevole waarde van $\theta = 30^\circ$.

Begin deur bogies AB en CD met gelyke radiusse te teken ($MA = MB = NC = ND$).

Boog AD se middelpunt, P , is die snypunt van ND en MA .

Boog BC se middelpunt, Q , is die snypunt van NC en MB .

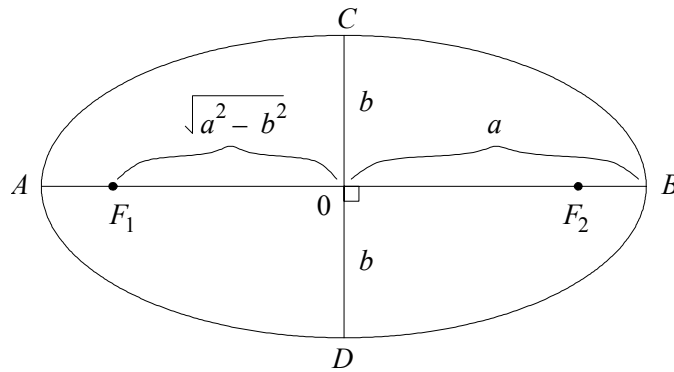
1.9 Ellips:



Die ellips is die lokus van 'n punt P wat só beweeg dat $F_1P + PF_2$ konstant bly. As 'n toutjie se eindpunte by die fokuspunte, F_1 en F_2 , vasgemaak word, kan die ellips geteken word deur die toutjie met die potlood se punt styf te hou.

Die probleem is gewoonlik: Die lang as, $2a$, en die kort as, $2b$, se lengtes is bekend.

Hoe ver is die fokuspunte van mekaar?

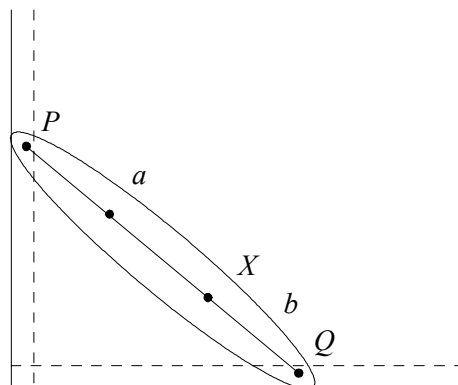


$$AB = 2a$$

$$CD = 2b$$

$$F_1F_2 = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$OF_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$$



$$PQ = a + b$$

$$PX = a$$

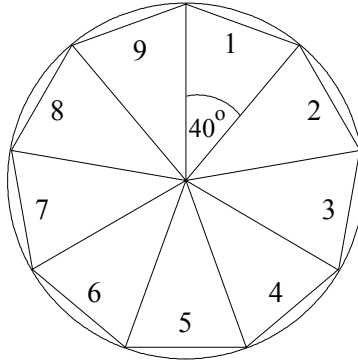
$$XQ = b$$

'n Tweede konstruksiemetode is om 'n punt P langs 'n vertikale lyn, en 'n punt Q langs 'n horisontale lyn te laat gly. Laat X 'n punt op PQ wees, met $PX = a$, $XQ = b$ (dus: $PQ = a + b$).

Die lokus van X is een kwart van 'n ellips met horisontale as $= 2a$ en vertikale as $= 2b$.

(Die stippellyne in bostaande skets is die asse van die ellips.)

1.10 Reëlmatige veelhoek met gegewe middelpunt, m.b.v. gradeboog:



$$\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

Aantal sye $= n$

Elke middelpuntshoek $= \frac{360^\circ}{n}$

Afdeling 2: Cartetiese Vergelykings

Gebruik "Excel" om 'n tabel van waardes te genereer.

2.1 Ellips wat asse sny by die punte

$$(a, 0) \quad (-a, 0)$$

$$(0, b) \quad (0, -b)$$

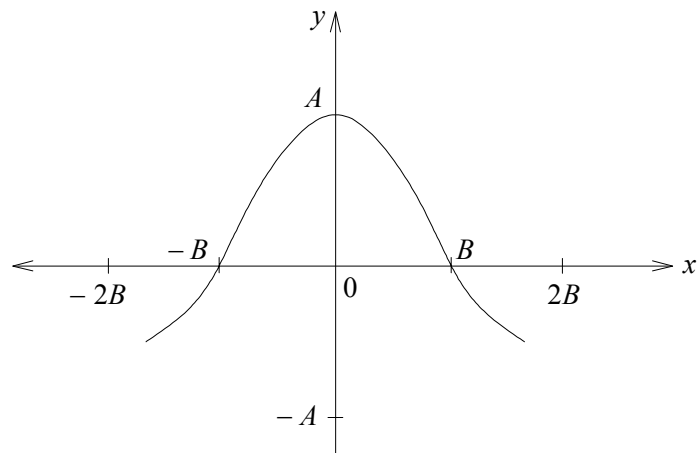
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2 Sirkel met radius $= R$ en middelpunt by (p, q) :

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2.$$

2.3 Golf-kurwe:

Let wel: x in **radiale**, nie grade nie!



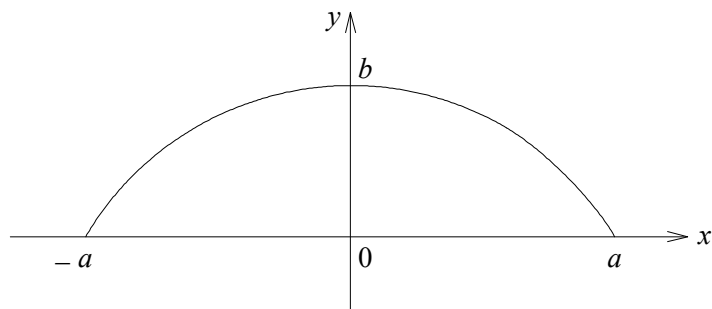
$$y = A \cos\left(\frac{\pi x}{2B}\right)$$

(Met x in **grade** is die vergelyking:

$$y = A \cos\left(\frac{180x}{2B}\right); \text{ oftewel}$$

$$y = A \cos\left(\frac{90x}{B}\right) .)$$

2.4 Sirkelboog met groot radius:



Die gedeelte bokant die x -as van 'n sirkel deur die punte $(x, y) = (-a, 0)$, $(0, b)$ en $(a, 0)$ se vergelyking word só verkry:

$$\text{Stel } R = \frac{(a^2 + b^2)}{(2b)} \quad (= \text{radius van die sirkel})$$

$$K = R^2$$

$$M = R - b \quad (\text{Middelpunt van die sirkel is } (0, -M))$$

Vir elke punt op die boog geld dan:

$$y = \sqrt{K - x^2} - M.$$

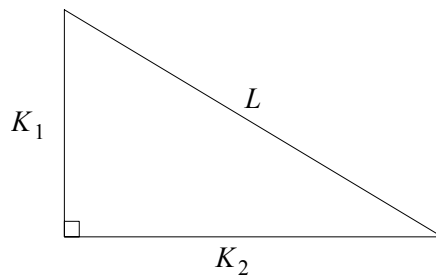
2.5 Afstandsformule:

A is die punt (x_A, y_A) , B die punt (x_B, y_B) ;

$$D = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Afdeling 3: Sin, Cos, Tan en Pythagoras

3.1 Lengtes van sye m.b.v. Pythagoras:

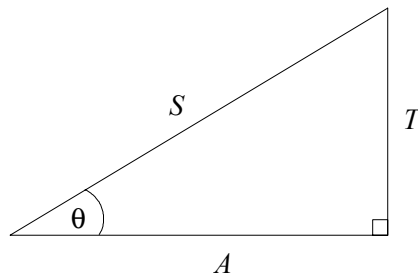


$$L = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$

$$K_1 = \sqrt{L^2 - K_2^2}$$

$$K_2 = \sqrt{L^2 - K_1^2}$$

3.2 Definisies van Trigonometriese Verhoudings:



A : Aangrensende sy

T : Teenoorstaande sy

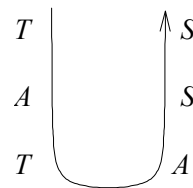
S : Skuinssy

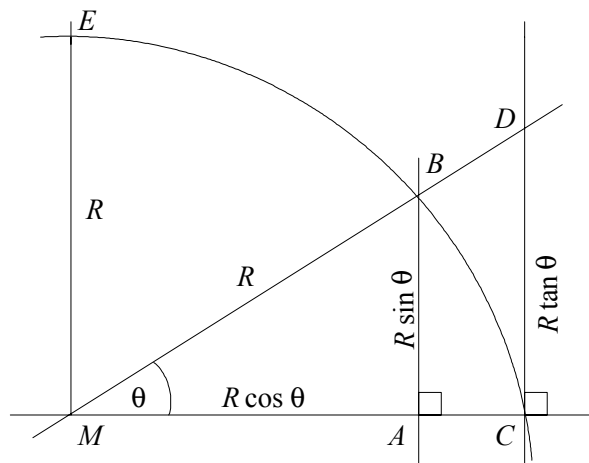
“TATASS”:

$$\sin \theta = T \div S$$

$$\cos \theta = A \div S$$

$$\tan \theta = T \div A$$

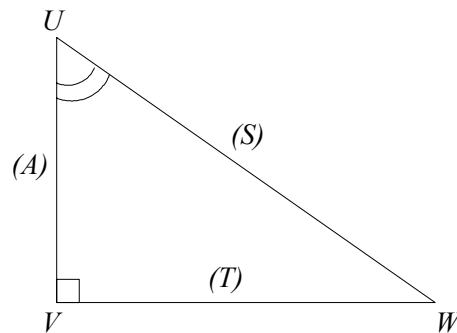




Radius van sirkel: $R = ME = MB = MC$

$MA = R \cos \theta$ $AB = R \sin \theta$ $CD = R \tan \theta$
--

3.3 Tipiese toepassings.



In $\triangle UVW$ is $\hat{V} = 90^\circ$, en \hat{U} is bekend.

Dan is $\hat{W} = 90^\circ - \hat{U}$.

Geval 1: Skuinssy UW is bekend. Dan is

$$VW = UW \times \sin \hat{U}$$

$$UV = UW \times \cos \hat{U}.$$

Geval 2: Teenoorstaande sy VW is bekend. Dan is

$$UW = VW \div \sin \hat{U}$$

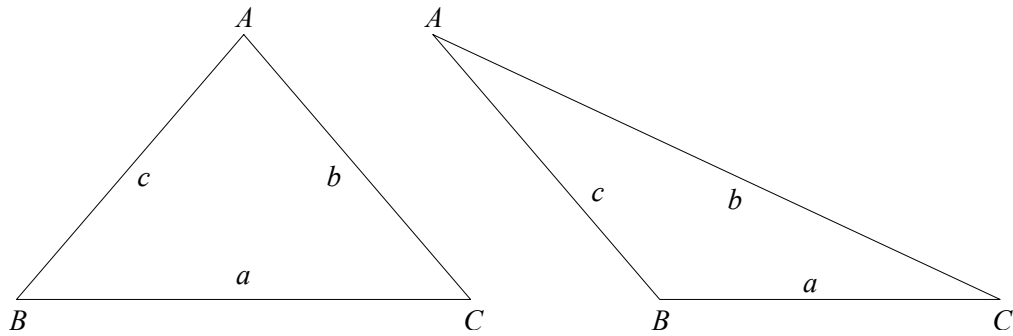
$$UV = VW \div \tan \hat{U}$$

Geval 3: Aangrensende sy UV is bekend. Dan is

$$UW = UV \div \cos \hat{U}$$

$$VW = UV \times \tan \hat{U}$$

3.4 Reëls wat vir alle driehoeke geld:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

As twee hoeke bekend is, is al drie dus eintlik bekend!

Geval 1: a , b en \hat{C} is bekend. Dan is $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$. Nou is al drie sye bekend. Sien geval 2.

Geval 2: a , b en c is bekend. Herbenoem die hoekpunte en sye só dat b die langste sy is. Dan is \hat{B} (teenoor b) die grootste hoek.

$$\hat{B} = \cos^{-1} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)$$

$$\hat{A} = \sin^{-1} \left(\frac{a \times \sin \hat{B}}{b} \right)$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}).$$

Geval 3: Drie hoeke en een sy is bekend. Sê \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} en a is bekend.

$$b = \frac{a \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}}$$

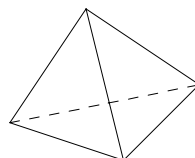
$$c = \frac{a \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}.$$

Afdeling 4: Reëlmatige poliëders

4.1 Reëlmatige tetraeder: (Piramide)

Bestaan uit 4 gelyksydige driehoeke.

By elke hoekpunt kom 3 vlakke bymekaar, en dus ook 3 sye.

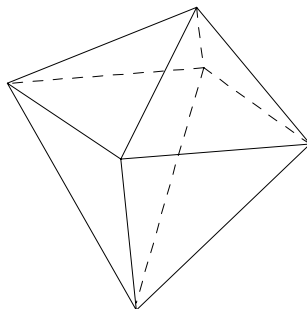


4.2 Kubus, bv. dobbelsteen (reëlmatige heksaeder).

Bestaan uit 6 vierkante.

By elke hoekpunt kom 3 vlakke bymekaar, en 3 sye.

4.3 Reëlmatige oktaeder, bv. klein wit blokkie van “Takasima”

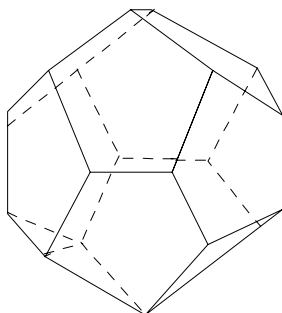


Bestaan uit 8 gelyksydige driehoeke.

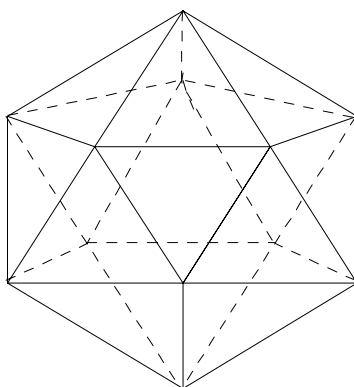
By elke hoekpunt kom 4 vlakke/sye bymekaar.

4.4 Reëlmatige dodekaeder.

Bestaan uit 12 reëlmatige vyfhoeke. By elke hoekpunt kom 3 vlakke/sye bymekaar.



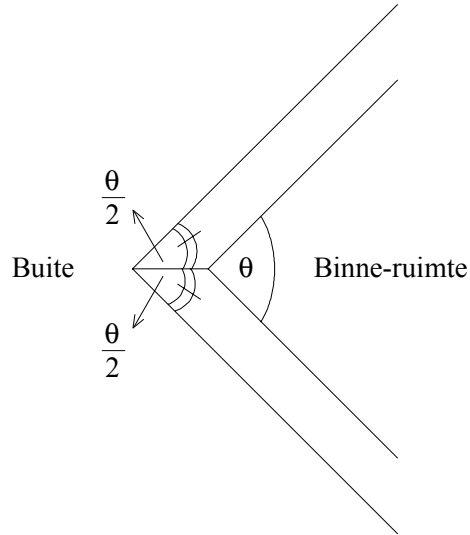
4.5 Reëlmatige ikosaeder.



Bestaan uit 20 gelyksydige driehoeke. By elke hoekpunt kom 5 vlakke/sye bymekaar.

4.6 Hoeke tussen die vlakke:

As elke “gesig”-vlakke apart gemaak word, is dit makliker om die poliëder te bou as wat dit lyk. Die gesiggies moet net teen die regte hoek na binne ge-“bevel” word:



As θ die hoek is wat twee vlakke maak, waar hulle langs 'n sy ontmoet, moet die planke elk met 'n hoek gelyk aan $\frac{\theta}{2}$ na binne afgesaag wees.

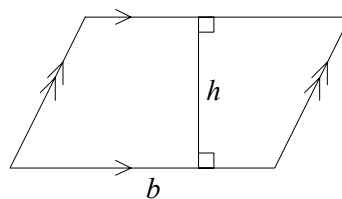
	$\cos \theta$	θ	$\frac{\theta}{2}$
Tetraeder	$\frac{1}{3}$	$70,53^\circ$	$35,26^\circ$
Kubus	0	90°	45°
Oktaeder	$-\frac{1}{3}$	$109,47^\circ$	$54,74^\circ$
Dodekaeder	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$116,57^\circ$	$58,28^\circ$
Ikosaeder	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$138,19^\circ$	$69,09^\circ$

(Interessant: $70,53^\circ + 109,47^\circ = 180^\circ$)

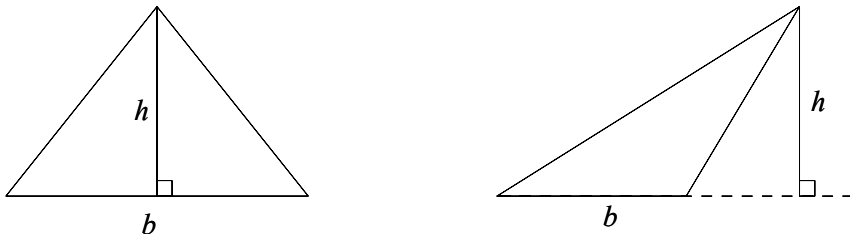
Afdeling 5: Formules

OPPERVLAKTES

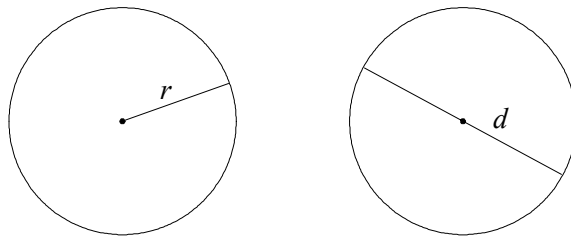
Parallelogram (bv. reghoek, ruit)



$$A = bh$$

Driehoek

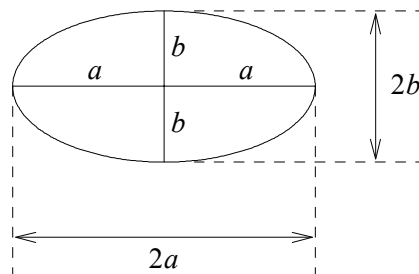
$$A = \frac{bh}{2}$$

Sirkel

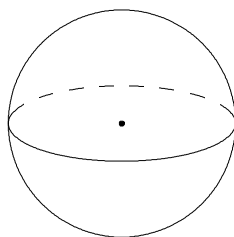
$$d = 2r$$

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

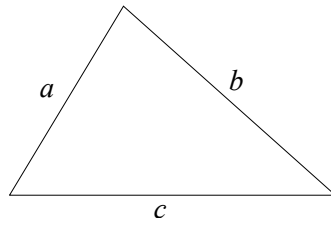
$$\text{Omtrek: } P = 2\pi r = \pi d$$

Ellips

$$A = \pi ab$$

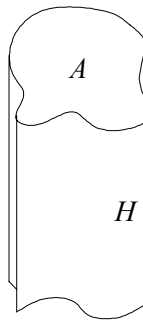
Bol

$$\text{Totale buite-oppervlakte (sfeer) } A = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

Driehoek (Heron se formule)

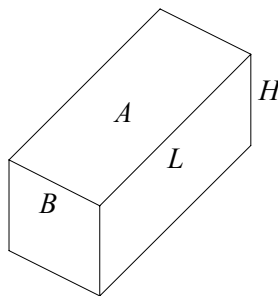
$$\text{Stel } s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

VOLUMES**Regte prisma**

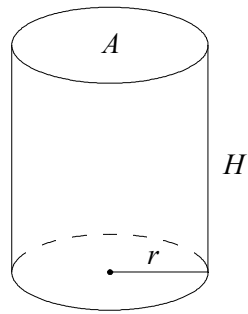
$$\begin{aligned} V &= \text{basisoppervlakte} \times \text{hoogte} \\ &= AH \end{aligned}$$

bv. baksteen



$$\begin{aligned} V &= AH \\ &= BLH \end{aligned}$$

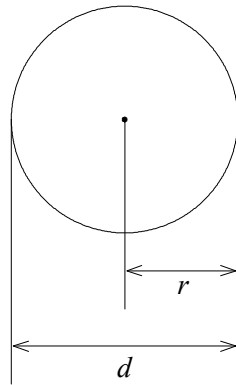
bv. silinder



$$V = AH$$

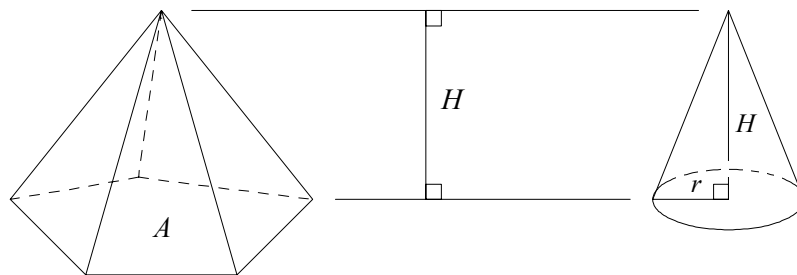
$$= \pi r^2 H$$

Bol



$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6}$$

Piramide



$$V = \frac{AH}{3} \text{ bv. kegel: } V = \frac{AH}{3} = \frac{\pi r^2 H}{3}.$$